

テニス・ボールのバウンド(自由落下)

テニスのルールブックでは、第二部・規則 3・(c)に次のように書いてあります。この規定のように、ボールを自由落下させたときのバウンドについて調べてみましょう。

.....ボールのバウンドは、そのボールがコンクリートのような固い平面上に 254.00 cm の高さから落下したとき、134.62 cm 以上 147.32 cm 以下でなければならない。」

1. 落下時および上昇時のボールの運動

ボールをある高さまで持ち上げておいて、そっと離してやると、地球に引っ張られてコート面まで落ちてバウンドしますね。まず、このボールの動きを数式で表現してみましょう。

落下中およびバウンドして上昇中のボールには重力と空気抵抗が働いています。ボールは回転しないものとします。ボールの質量を m 、最初の高さを h_{f1} とします。図1のように、ボールの落下線の上向きに x 軸をとります。このときボールの運動方程式は次のように表されます。

$$m\ddot{x} = -mg + \frac{C_d \rho A}{2} \dot{x}^2 \equiv -mg - b\dot{x}^2 \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (1)$$

ここで、 g : 重力の加速度, C_d : 空気抵抗係数, ρ : 空気密度, A : 前面投影面積, $b = \frac{C_d \rho A}{2}$ です。

式(1)で \ddot{x} はボールの位置 x を時間で2回微分(加速度)したことを表しています。また、 $\operatorname{sgn}(\dot{x})$ は符号関数であり、速度 \dot{x} が負の場合は -1、正の場合は+1 となります。すなわち、ボールが落下(速度が負)するときは空気抵抗は上向きであり、バウンドして上昇するときは空気抵抗は下向きであることを表しています。

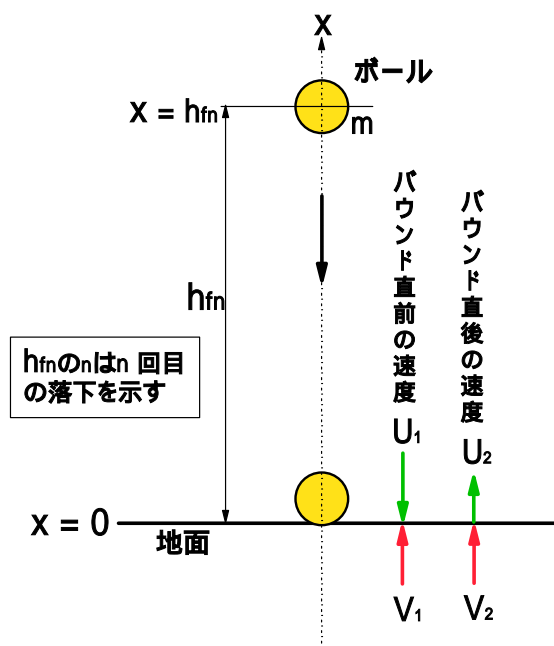


図1 ボールのバウンド

ボールの速度を $\dot{x} = v$ として式(1)を書き換えると次のようになります。

$$m\dot{v} = m \frac{dv}{dt} = -mg - bv^2 \operatorname{sgn}(v) \quad \therefore -\frac{m}{b} \frac{dv}{v^2 \operatorname{sgn}(v) + \frac{mg}{b}} = dt \quad (2)$$

式(2)の両辺を積分して、落下時と上昇時に分けて次の式が得られます。 C_1, C_2 は積分定数です。

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{bg}} \log_e \frac{v - \sqrt{\frac{mg}{b}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{b}}} = t + C_1 \quad (\text{落下時}) \quad (3)$$

$$-\sqrt{\frac{m}{bg}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{mg}} v \right) = t + C_2 \quad (\text{上昇時}) \quad (4)$$

式(3)および式(4)を変形して次の式が得られます。 C_3, C_4 は積分定数です。

$$\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{b}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{b}}} = \exp \left(2\sqrt{\frac{bg}{m}} t + 2\sqrt{\frac{bg}{m}} C_1 \right) = C_3 \exp \left(2\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) \quad (\text{落下時}) \quad (5)$$

$$v = \sqrt{\frac{mg}{b}} \tan \left(-\sqrt{\frac{bg}{m}} t - \sqrt{\frac{bg}{m}} C_2 \right) = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tan \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t + C_4 \right) \quad (\text{上昇時}) \quad (6)$$

2. 落下時の詳細

1回目の落下は持ち上げたボールをそっと離してやるので $t=0$ で $v=0$ です。バウンドして最高点に到達した後また落下し始めますが、このときも正の速度から負の速度に切り替わりますから、切り替わり点を改めて $t=0$ として、このとき $v=0$ となります。

式(5)で $t=0$ のとき $v=0$ とすると $C_3 = -1$ となります。このことを考慮して式(5)を整理すると、落下時のボールの速度が次のように得られます。

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \frac{\exp \left(2\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) - 1}{\exp \left(2\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) + 1} = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) \quad (\text{落下時のボールの速度}) \quad (7)$$

式(7)を積分して次の式が得られます。 C_5 は積分定数です。

$$x = -\frac{m}{b} \log_e \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) \right] + C_5 \quad (8)$$

n 回目の落下時の高さを h_{fn} とすると、 $t = 0$ で $x = h_{fn}$ であることから、式(8)から $C_5 = h_{fn}$ となります。このことを考慮して式(8)を整理すると、 n 回目の落下時のボールの位置が次のように得られます。

$$x = -\frac{m}{b} \log_e \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t \right) \right] + h_{fn} \quad (n \text{ 回目の落下時のボールの位置}) \quad (9)$$

式(9)で $x = 0$ と置くと n 回目のバウンドまでに要する時間 t_{fn} が次のように得られます。

$$\left. \begin{aligned} \cosh \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t_{fn} \right) &= \frac{\exp \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t_{fn} \right) + \exp \left(-\sqrt{\frac{bg}{m}} t_{fn} \right)}{2} = \exp \left(\frac{bh_{fn}}{m} \right) \\ \therefore \left[\exp \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t_{fn} \right) \right]^2 - 2 \exp \left(\frac{bh_{fn}}{m} \right) \exp \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t_{fn} \right) + \left[\exp \left(\frac{bh_{fn}}{m} \right) \right]^2 - \left[\exp \left(\frac{bh_{fn}}{m} \right) \right]^2 + 1 &= 0 \\ \therefore \left[\exp \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t_{fn} \right) - \exp \left(\frac{bh_{fn}}{m} \right) \right]^2 &= \left[\exp \left(\frac{bh_{fn}}{m} \right) \right]^2 - 1 \\ \therefore \exp \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t_{fn} \right) &= \exp \left(\frac{bh_{fn}}{m} \right) + \sqrt{\exp \left(\frac{2bh_{fn}}{m} \right) - 1} \\ \therefore t_{fn} &= \sqrt{\frac{m}{bg}} \log_e \left[\exp \left(\frac{bh_{fn}}{m} \right) + \sqrt{\exp \left(\frac{2bh_{fn}}{m} \right) - 1} \right] \quad (n \text{ 回目のバウンドまでに要する時間}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

また、式(7)で $t = t_{fn}$ とすると、次のように n 回目のバウンド直前のボールの速度が得られます。これを U_{fn} とします。負号がつくのは図1で速度が下向きであることを示しています。

$$U_{fn} = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh \left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t_{fn} \right) \quad (n \text{ 回目のバウンド直前のボールの速度}) \quad (11)$$

3. バウンド (コート面に衝突)

ボールは自由落下し $x = 0$ でバウンド (コート面に衝突) します。

質量 m で速度 U_1 の回転していないボールと、質量 M で速度 V_1 の回転していない (?) コート面がボールが落下してきた直線上で衝突し、衝突後も同じ直線上を運動するものとします。また、衝突後のそれぞれの速度が U_2, V_2 になった場合、衝突前後の運動量の和は一定であるという運動量保存則によって、次の関係が成り立ちます。

$$mU_1 + MV_1 = mU_2 + MV_2 \quad (12)$$

また、ボールとコート面の相対速度の比によって、反発係数 e が次のように表されます。

$$e = \frac{\text{衝突後遠ざかる相対速度}}{\text{衝突前近づく相対速度}} = \frac{U_2 - V_2}{V_1 - U_1} \quad (13)$$

ちなみに $e = 1$ の場合は**完全弾性衝突**と言い、衝突前後で速度が変わらない、また、質量も変わらないので、運動エネルギーの損失がない衝突になります。逆に $e = 0$ の場合は**非弾性衝突**と言い、衝突によって二つの物体は合体してしまいます。ボールがコート面に衝突するような一般的な衝突では $0 < e < 1$ であり**弾性衝突**と言います。この場合は衝突によってエネルギーの損失があると考えられます。

式(12)と式(13)から V_2 を消去すると次の関係が得られます。

$$U_2 = \frac{m - eM}{m + M}U_1 + \frac{M(1 + e)}{m + M}V_1 \quad (14)$$

式(14)で U_1, U_2, m がボールの速度, 質量を、 V_1, M はコート面(すなわち地球)の速度, 質量を表しているので、 $V_1 \cong 0, m/M \cong 0$ と置くことができます。したがって、式(14)は次のように簡単になります。

$$U_2 = -eU_1 \quad (15)$$

4. 上昇時の詳細

バウンドして上昇するボールの速度は式(6)で表されます。 n 回目の落下時のバウンド直前の速度は式(11)から U_{fn} です。 n 回目の上昇が始まる時の速度を U_{cn} とすると式(15)から次の関係が得られます。

$$U_{cn} = -eU_{fn} \quad (16)$$

n 回目の上昇が始まる時は、 $t = 0$ で $v = U_{cn}$ です。式(6)で $t = 0$ のとき $v = U_{cn}$ と置くことで、 $C_4 = -\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{mg}}U_{cn}\right)$ となります。このことを考慮して式(6)を整理すると、 n 回目の上昇時のボールの速度が次のように得られます。

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tan\left[\sqrt{\frac{bg}{m}}t - \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{mg}}U_{cn}\right)\right] \quad (n\text{回目の上昇時のボールの速度}) \quad (17)$$

式(17)を積分して次の式が得られます。 C_6 は積分定数です。

$$x = \frac{m}{b} \log_e \left| \cos\left[\sqrt{\frac{bg}{m}}t - \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{mg}}U_{cn}\right)\right] \right| + C_6 \quad (18)$$

上昇が始まる時はボールはコート面にあるわけですから、 $t = 0$ で $x = 0$ です。式(18)で $t = 0$ のときに $x = 0$ とすると、積分定数は次のようになります。

$$C_6 = -\frac{m}{b} \log_e \left| \cos\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b}{mg}}U_{cn}\right)\right] \right| \quad (19)$$

式(18)と式(19)から n 回目の上昇時のボールの位置が次のように得られます。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{m}{b} \log_e \left| \cos \left[\sqrt{\frac{bg}{m}} t - \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{mg}} U_{cn} \right) \right] \right| - \frac{m}{b} \log_e \left| \cos \left[\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{mg}} U_{cn} \right) \right] \right| \\ &= \frac{m}{b} \log_e \left| \frac{\cos \left[\sqrt{\frac{bg}{m}} t - \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{mg}} U_{cn} \right) \right]}{\cos \left[\tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{mg}} U_{cn} \right) \right]} \right| \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(n 回目の上昇時のボールの位置)

式(17)で $v = 0$ とすると、 n 回目のバウンドで最高点に到達するまでの時間 t_{cn} が次のように得られます。

$$t_{cn} = \sqrt{\frac{m}{bg}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{mg}} U_{cn} \right) \quad (21)$$

式(20)に式(21)の t_{cn} を代入すると、 n 回目のバウンドでの最高点 h_{cn} が次のように得られます。

$$\left. \begin{aligned} h_{cn} &= \frac{m}{b} \log_e \left| \frac{1}{\cos \left\{ \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{mg}} U_{cn} \right) \right\}} \right| = -\frac{m}{b} \log_e \left| \cos \left\{ \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{b}{mg}} U_{cn} \right) \right\} \right| \\ &= -\frac{m}{b} \log_e \left| \cos \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b}{mg} U_{cn}^2}} \right) \right\} \right| \\ &= -\frac{m}{b} \log_e \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b}{mg} U_{cn}^2}} \right| \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

5. 実際の問題についての試算

これで落下時、上昇時のボールの速度、ボールの位置を求めるための関係式が得られました。ここで実際の問題について試算してみましょう。

5.1 試算準備

- g は重力の加速度ですから $g = 980 \text{ cm} / \text{s}^2$ です。
- h_{f1} はルールブックの第二部・規則 3・(c)のボールの落下高さの規定から $h_{f1} = 254 \text{ cm}$ とします。
- ルールブックの第二部・規則 3・(b)の規定からボールの質量は $56.0 \text{ g} \sim 59.4 \text{ g}$ となっていますので、中央の値をとって $m = 5.89 \times 10^{-5} \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ (57.7 g) とします。

- C_d は例えば参考文献 1 に時速 194 km 以上のテニスボールは 0.3 というのがあります。でもここでは自由落下を考えています。空気抵抗を無視した場合の 1 回目のバウンド直前の速度は $-\sqrt{2gh} = -\sqrt{2 \times 980 \times 254} = -706 \text{ cm/s} = 25.4 \text{ km/h}$ ですからボールの速度はずっと低い範囲です。抵抗係数はレイノルズ数の関数です。大気圧下で 25 の空気の粘度は $1.56 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 、ボールの直径は 0.067 m 、速度は 7 m/s (25 km/h) 程度ですからレイノルズ数は $R_e = \frac{0.067 \times 7}{1.56 \times 10^{-5}} = 3.01 \times 10^4$ となります。参考文献 2 によると、このレイノルズ数のときは $C_d = 0.5$ となります。ちなみに、速度が時速 194 km ではレイノルズ数が 2.3×10^5 で $C_d = 0.3$ 程度になっています。と言うか、ちょうどこの程度のレイノルズ数で空気抵抗係数が急激に小さくなっているのです。(これを臨界レイノルズ数と言います)
- 空気の密度 ρ は理科年表から大気圧下で 25 のときに $\rho = 1.208 \times 10^{-9} \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}^4$ です。
- ルールブックの第二部・付則 1・(4)からボールの直径は 6.541 cm ~ 6.858 cm 【BT1 (Fast), BT2 (Medium) の場合】ですから中央の値を使って $d = 6.7 \text{ cm}$ とし、 $A = \frac{\pi}{4} \times 6.7^2 = 35.26 \text{ cm}^2$ となります。
- $b = \frac{C_d \rho A}{2} = \frac{0.5 \times 1.208 \times 10^{-9} \times 35.26}{2} = 1.06 \times 10^{-8} \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}^2$ となります。

5.2 ルールブックの規定

これで計算準備ができました。ルールブックに規定された 1 回目のバウンドで到達する最高点について見てみましょう。まず、式(10)から 1 回目のバウンドまでに要する時間 t_{f1} を求めます。この t_{f1} を用いて式(11)から 1 回目のバウンド直前のボールの速度 U_{f1} を求めます。この U_{f1} を用いて式(16)から 1 回目の上昇が始まるときのボールの速度 U_{c1} を求めます。最後にこの U_{c1} を用いて式(22)から 1 回目のバウンドで到達する最高点 h_{c1} を求めます。ここで、ルールブックの規定から、1 回目の落下高さは $h_{f1} = 254 \text{ cm}$ で、1 回目のバウンドの最高点は $h_{c1} = 134.62 \sim 147.32 \text{ cm}$ にならなければなりません。

$$\left. \begin{aligned}
 t_{f1} &= \sqrt{\frac{m}{bg}} \log_e \left[\exp\left(\frac{bh_{f1}}{m}\right) + \sqrt{\exp\left(\frac{2bh_{f1}}{m}\right) - 1} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{5.89 \times 10^{-5}}{1.06 \times 10^{-8} \times 980}} \log_e \left[\exp\left(\frac{1.06 \times 10^{-8} \times 254}{5.89 \times 10^{-5}}\right) + \sqrt{\exp\left(\frac{2 \times 1.06 \times 10^{-8} \times 254}{5.89 \times 10^{-5}}\right) - 1} \right] \\
 &= 0.7255 \text{ sec}
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 U_{f1} &= -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t_{f1}\right) = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \frac{\exp\left(2\sqrt{\frac{bg}{m}} t_{f1}\right) - 1}{\exp\left(2\sqrt{\frac{bg}{m}} t_{f1}\right) + 1} \\
 &= -\sqrt{\frac{5.89 \times 10^{-5} \times 980}{1.06 \times 10^{-8}}} \frac{\exp\left(2\sqrt{\frac{1.06 \times 10^{-8} \times 980}{5.89 \times 10^{-5}}} \times 0.7255\right) - 1}{\exp\left(2\sqrt{\frac{1.06 \times 10^{-8} \times 980}{5.89 \times 10^{-5}}} \times 0.7255\right) + 1} \\
 &= -689.78 \text{ cm/s}
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$U_{c1} = -eU_{f1} = 689.78e \text{ cm/s} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 h_{c1} &= -\frac{m}{b} \log_e \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b}{mg} U_{c1}^2}} \right| \\
 &= -\frac{5.89 \times 10^{-5}}{1.06 \times 10^{-8}} \log_e \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1.06 \times 10^{-8}}{5.89 \times 10^{-5} \times 980} \times 689.78^2 \times e^2}} \right| \\
 &= -5.557 \times 10^3 \times \log_e \left| \frac{1}{\sqrt{1 + 0.0874e^2}} \right|
 \end{aligned} \tag{26}$$

式(26)を変形すると次の関係が得られます。

$$e = \sqrt{\frac{1}{0.0874 \times \exp\left(\frac{-2h_{c1}}{5.557 \times 10^3}\right)} - \frac{1}{0.0874}} = \begin{cases} 0.754 & @ h_{c1} = 134.62 \text{ cm} \\ 0.789 & @ h_{c1} = 147.32 \text{ cm} \end{cases} \tag{27}$$

すなわち、「**ルールブックのボールの規定で言うコンクリートのような固い平面の反発係数は 0.754 ~ 0.789 程度を想定している**」こととなります。

5.3 遊んでみよう

では、ここで少し遊んでみましょう。ルールブックで規定された $h_{f1} = 254 \text{ cm}$ からボールを落としたとき、バウンドする平面の反発係数によってバウンドがどのように変わるか見てみましょう。反発係数が $e = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ の五種類の場合について計算した結果を図2に示します。

図2は、横軸に自由落下が始まった時刻からの経過時間を取り、縦軸にコート面からの高さをとって、 n 回目のバウンドによる最高到達点の高さをプロットしたものです。落下の軌跡ではなく、バウンドによって到達する最高点高さと、自由落下が始まってからそこに至るまでの時間をプロットして線で結んだものですので注意してください。

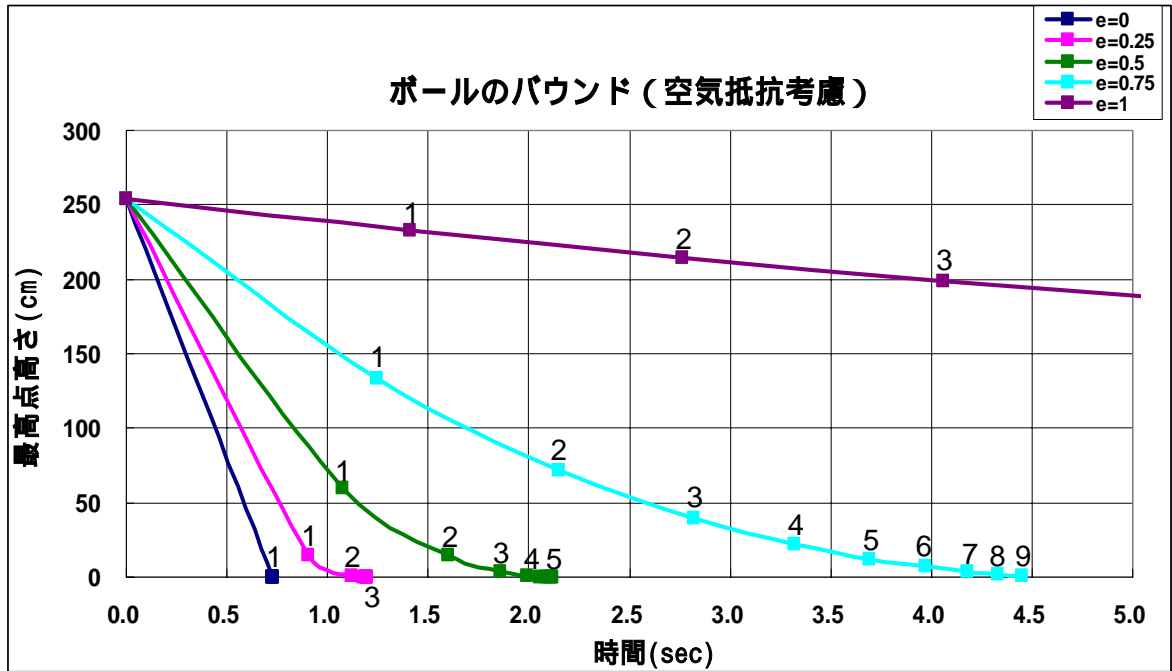


図2 ボールバウンド (空気抵抗考慮)

図2で $e = 0$ の場合は、ボールを落としてから 0.73 秒後に 1 回目のバウンドになりますが、ここでボールとコート面が合体しますから 2 回目以降のバウンドはありません。もしもコート面が軟らかい粘土のようなものでできていればこんなことがありそうですね。

$e = 1$ の場合は、コート面との衝突でエネルギー損失がないので、最も高い高さまでバウンドします。空気抵抗で徐々に最高点高さが低くなりますが、かなり長い時間バウンドが繰り返されます。

$0 < e < 1$ では実際にボールを落とした場合に経験するように、バウンド回数が増えるに従って最高到達点高さがどんどん低くなり遂にはバウンドしなくなります。式(27)のように、 $e = 0.75$ の場合がルールブックが想定している反発係数に近いのですが、1 回目のバウンドで約 133 cm、2 回目のバウンドで約 72 cm、3 回目のバウンドで約 40 cm、...9 回目のバウンドで 1.2 cm まで上がる計算になります。しかし、実際に落として観察してみると、9 回もバウンドしないようです。ボール表面のメルトンの影響や、コート面に衝突したときのボールの変形などが関係して、単純な計算より減衰要素が大きいのでしょうか。

【参考文献】

1. <http://scienceworld.wolfram.com/physics/DragCoefficient.html>
2. 竹中，浦田共著，水力学例題演習，コロナ社

以上